



FACULDADE DE TECNOLOGIA E CIÊNCIAS DA BAHIA

FATEC-BA – FACULDADE DE TECNOLOGIA E CIÊNCIAS DA BAHIA

Componente Curricular: Cálculo Diferencial e Integral II

Docente: Luiz Henrique Menezes de Lima **Semestre:** 2022.1

Data: 22 de Março de 2022 **Curso:** Engenharia – 3º Semestre

Discente: _____

1º Verificação de Cálculo Diferencial e Integral II

“Aprender é a única coisa que a mente nunca se cansa, nunca tem medo e nunca se arrepende”

Questão 01: Analise as proposições abaixo, se Verdadeiro MOSTRE e se Falso de um CONTRA – EXEMPLO.

() Tendo a integral $\int x \ln x dx$ resolvida pela método da substituição teremos sua total integralidade $\frac{1}{4}x^2(2 \ln x - 1) + c$.

() A integral $\int \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$, com $\cos x \neq 0$ para qualquer que seja a integração temos como resultado $x - \sin x + c$.

() Seja f uma função definida num intervalo I . Dizemos que uma função F , também definida em I , é primitiva da função f se satisfaz a condição para qualquer derivada.

Questão 02: Seja $f(x, y) = \cos(\sqrt[3]{x^2 + y^2})$. Em que pontos de \mathbb{R}^2 f é integráveis? Justifique.

Questão 03: . Encontre uma primitiva da função dada por $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$, que se anule no ponto de abscissa $x = 1$.

Questão 04: Resolva as integrais abaixo seguindo as instruções: As letras a e c pelo método convencional integral indefinida e as letras b e d pelo método da substituição.

a) $\int \frac{x^2 + 2}{x^2 - 3x - 4} dx$

c) $\int \frac{x^3 - 1}{x - 1} dx$

b) $\int (x + \sec^2 3x) dx$

d) $\int \frac{\sqrt{x-2}}{x+1} dx$

Resolução da Prova de Cálculo 02 - I Unidade

2022.1

Questão 01

(F) $\int x \ln x dx = (\ln x) \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx$

falso

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

$$= \text{~~...~~$$

(V) $\int \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} dx$

sendo $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$\int \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} dx$$

Como $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
então:

$$(1 - \cos^2 x) = (1 - \cos x)(1 + \cos x)$$

$$\int \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 + \cos x)} dx$$

$$\int (1 - \cos x) dx$$

$$\int 1 dx - \int \cos x dx$$

$$\int dx - \int \cos x dx$$

$$x - \sin x + C$$

Verdadeiro

()

Questão 3

$$f(x) = \int \frac{1}{x^2} + 1 dx$$

$$\int x^{-2} + 1 dx \Rightarrow \int x^{-2} dx + \int 1 dx$$

$$\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + x = \frac{-1}{x} + x = -\frac{1}{x} + x + C$$

Logo $\int f(x) = \int \frac{1}{x^2} + 1 dx =$

$$f(x) = -\frac{1}{x} + x$$

$$f(1) = -\frac{1}{1} + 1$$

$$f(1) = -1 + 1$$

$$f(1) = 0$$

questão 3
questão 2
questão 1
questão 4
questão 5

1. (2,0) Seja $f(x,y) = \cos(\sqrt[3]{x^2+y^2})$. Em que pontos de \mathbb{R}^2 é f diferenciável? Justifique!

Se $(x,y) \neq (0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\sin(\sqrt[3]{x^2+y^2}) \cdot \frac{1}{3} (x^2+y^2)^{-2/3} \cdot 2x$
 e, analogamente, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\sin(\sqrt[3]{x^2+y^2}) \cdot \frac{1}{3} (x^2+y^2)^{-2/3} \cdot 2y$

que são funções contínuas.

Logo f é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e portanto diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Ver o que acontece com f em $(0,0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^{2/3}) - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos(x^{2/3}) - 1)(\cos(x^{2/3}) + 1)}{x(\cos(x^{2/3}) + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2(x^{2/3})}{x^{4/3}(\cos(x^{2/3}) + 1)} \end{aligned}$$

(limite fundamental)

Analogamente, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ (observe que $f(x,y) = f(y,x)$)

Temos então um candidato a plano tangente ao G_f em $(0,0, f(0,0)) = (0,0,1)$. Esse plano tem equação:

$$z = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)$$

ou seja é o plano $z=1$.

Seja $E(x,y) = f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)$
 $= \cos(\sqrt[3]{x^2+y^2}) - 1$

Calcular $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{E(x,y)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos(\sqrt[3]{x^2+y^2}) - 1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(\cos(\sqrt[3]{x^2+y^2}) - 1)(\cos(\sqrt[3]{x^2+y^2}) + 1)}{\sqrt{x^2+y^2}(\cos(\sqrt[3]{x^2+y^2}) + 1)} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-\sin^2(\sqrt[3]{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}(\cos(\sqrt[3]{x^2+y^2}) + 1)} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-\left(\frac{\sin(\sqrt[3]{x^2+y^2})}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}}{\sqrt{x^2+y^2}(\cos(\sqrt[3]{x^2+y^2}) + 1)} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-\left(\frac{\sin(\sqrt[3]{x^2+y^2})}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}}}{\sqrt{x^2+y^2}(\cos(\sqrt[3]{x^2+y^2}) + 1)} = C \end{aligned}$$

(*) (veja abaixo)

Questões 04

$$a) \int \frac{x^2 + 2}{x^2 - 3x - 4} dx$$

Some e subtraia por $(-3x-6)$

$$\int \frac{x^2 + 2 - 3x - 6 - (-3x-6)}{x^2 - 3x - 4} dx$$

$$\int \frac{x^2 + 2 - 3x - 6}{x^2 - 3x - 4} + \frac{3x+6}{x^2 - 3x - 4} dx$$

$$\int \frac{\cancel{x^2} - 3\cancel{x} - 4}{\cancel{x^2} - 3\cancel{x} - 4} + \frac{3x+6}{x^2 - 3x - 4} dx$$

$$\int 1 + \frac{3x+6}{x^2 - 3x - 4} dx$$

$$\int 1 dx + \int \frac{3x+6}{x^2 - 3x - 4} dx$$

$$x + \int \frac{3x+6}{x^2 - 3x - 4} dx$$

$$x + \int \frac{3(x+2)}{x^2 - 3x - 4} dx$$

$$x + \int -\frac{3}{5(x+1)} + \frac{18}{5(x-4)} dx$$

$$x - \int \frac{3}{5(x+1)} + \frac{18}{5(x-4)} dx$$

$$x - \frac{3}{5} \ln(x+1) + \frac{18}{5} \ln(x-4)$$

$$c) \int \frac{x^3 - 1}{x - 1} dx$$

Fatorando:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Logo

$$x^3 - 1 = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)}$$

$$\int \frac{\cancel{(x - 1)} \cdot (x^2 + x + 1)}{\cancel{(x - 1)}} dx$$

$$\int (x^2 + x + 1) dx$$

$$\int x^2 dx + \int x dx + \int 1 dx$$

$$\frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{x^{1+1}}{1+1} + x$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C$$